Potenciales y campos eléctricos

Objetivo

El objetivo de este experimento es determinar las líneas (o superficies) equipotenciales, es decir, el lugar geométrico donde el potencial eléctrico es constante. Estos potenciales son creados en este caso conectando electrodos sumergidos en un medio poco conductor (líquido) a una fuente de baja tensión. Los potenciales se miden con un voltímetro. Finalmente, se propone comparar los resultados experimentales de la distribución de potencial con la que resulta al resolver la ecuación de Laplace con un método numérico usando una planilla de cálculo.

Introducción

El campo eléctrico en un dado punto del espacio, está relacionado con las fuerzas que en dicho punto se ejercen sobre una carga testigo *q*, colocada en ese punto. Si la fuerza que en el punto de coordenadas (x,y) el campo eléctrico $\vec{E}$ (x,y) ejerce sobre la carga *q* es $\vec{F}$ (x,y). Según la definición de campo eléctrico tenemos[1-3]:

$$\vec{F}(x,y,z) = q \cdot \vec{E}(x,y,z) \qquad (1)$$

Como la fuerza es un vector y la carga *q* un escalar, resulta claro que $\vec{E}$ es también un vector. $\vec{F}$ Por su parte el potencial eléctrico esta relacionado con el trabajo que se necesita hacer para llevar una carga de un punto a otro debido al campo eléctrico. Como el trabajo es una magnitud escalar, el potencial también lo es. Más específicamente la variación de potencial entre dos puntos próximos es:

$$dV = -\frac{dW}{q} = -\frac{1}{q}\vec{F}(x,y)\cdot\vec{dl} = -\vec{E}\cdot\vec{dl} \qquad (2)$$

O sea que:

$$E_x = -\frac{dV}{dx}, \qquad E_y = -\frac{dV}{dy} \quad \text{y} \quad E_z = -\frac{dV}{dz} \qquad (3)$$

o más generalmente:

$$E = -\left[\frac{dV}{d\ell}\right]_{max} \qquad (4)$$

donde esta expresión significa que el módulo de $\vec{E}$ es igual a la derivada del potencial con respecto al desplazamiento, en la dirección que esta derivada es máxima. Además esta dirección es la dirección del campo $\vec{E}$. Esto se escribe más formalmente (los que no estén familiarizados con esta notación, pueden ignorar esta ecuación por ahora).

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V \,. \tag{5}$$

Vemos también que cuando dV=0, como ocurre sobre una línea equipotencial, la componente de $\vec{E}$ sobre esta línea es cero. En otras palabras *$\vec{E}$ es siempre perpendicular a las líneas (o superficies) equipotenciales*. La idea central de este experimento consiste en determinar experimentalmente, para una dada configuración, las líneas equipotenciales (es decir las líneas sobre las cuales el potencial (medido con un voltímetro) es constante. A partir de estas líneas equipotenciales, se pueden encontrar las líneas de campo, trazando las trayectorias ortogonales a las líneas equipotenciales.

La Ley de Gauss[1-3] (físicamente equivalente a la ley de Coulomb) relaciona los campos con las cargas y puede expresarse de dos maneras. En forma integral establece:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{neta}}{\varepsilon_0} \,, \tag{6}$$

aquí la integral es sobre una superficie cerrada y q_{neta} es la carga neta en el interior de dicha superficie. En forma diferencial, esta ecuación se escribe como:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{7}$$

donde ρ es la densidad volumétrica de carga. Combinado (5) y (7) obtenemos la ecuación de Poisson que relaciona los potenciales con las cargas:

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{8}$$

Cuando la densidad de cargas es nula, o sea en las zonas donde no hay carga neta, esta ecuación se reduce a la ecuación de Laplace:

$$\nabla^2 V = 0 \tag{9}$$

Método de Relajación:[3-5] Este método permite resolver en forma numérica la ecuación de Laplace. En particular describiremos brevemente su resolución para el caso bidimensional que puede realizarse usando una hoja de cálculo. Si el problema es bidimensional, la ecuación (9) puede escribirse como:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0 \qquad (10)$$

Si discretizamos el plano *x,y* de modo de formar una malla bidimensional como se ilustra en la Figura 1, las coordenadas *x,y* se reemplazan por los índices *i,j*. Recordando las expresiones clásicas de derivación numérica:

$$\frac{\partial V}{\partial x} \approx \frac{V_{i+1,j} - V_{i,j}}{h}, \qquad \frac{\partial V}{\partial y} \approx \frac{V_{i,j+1} - V_{i,j}}{h},$$
$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \approx \frac{V_{i+1,j} - 2 \cdot V_{i,j} + V_{i-1,j}}{h^2}, \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \approx \frac{V_{i,j+1} - 2 \cdot V_{i,j} + V_{i,j-1}}{h^2} \qquad (11)$$

la expresión (10) puede aproximarse como:

$$\frac{V_{i+1,j} - 2 \cdot V_{i,j} + V_{i-1,j}}{h^2} + \frac{V_{i,j+1} - 2 \cdot V_{i,j} + V_{i,j-1}}{h^2} = 0 \qquad (12)$$

donde *h* es el tamaño de la discretización o de la celda unitaria, como se ilustra en la Figura 1.

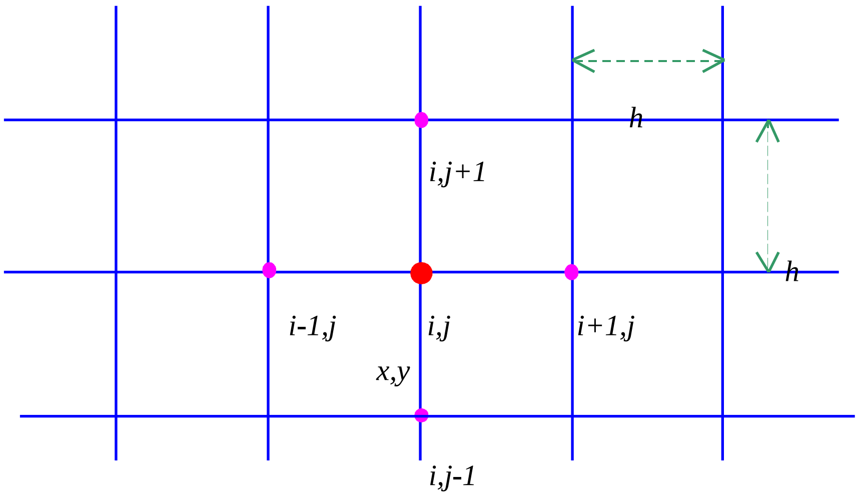

Figura 1. Discretización del plano.

Resolviendo (12) para $V_{i,j}$ [$\approx V(x,y)$] tenemos:

$$V_{i,j} = \frac{1}{4} \cdot \left(V_{i+1,j} + V_{i-1,j} + V_{i,j+1} + V_{i,j-1}\right). \qquad (13)$$

Esto significa que si la función *V(x,y)* satisface la ecuación de Laplace en dos dimensiones, el valor del potencial *V(I,j)* en un dado punto del plano (*i,j*) es igual al promedio del valor del potencial en los cuatro puntos vecinos próximos. En el método de relajación se hace uso de esta propiedad de la solución de la ecuación de Laplace. En una hoja de cálculo, el valor de una dada celda es el promedio de sus vecinas más próximas, excepto para aquellos puntos que tienen un potencial fijo (coincidente con ekl potencial de los electrodos), cuyos valores están establecidos por las condiciones de borde y no varían. Luego se realizan iteraciones hasta que los valores de las celdas no cambian o hasta que su variación es menor que un valor prefijado, digamos del 0.1%. Un ejemplo de aplicación de este procedimiento se puede encontrar en la planilla *relax.xls* que pude bajarse de Internet del sitio http://home.ba.net/~sgil.

Existen dos tipos básicos de condiciones de borde en el caso que se use un diseño experimental como el propuesto en este experimento. Por un lado, están los valores de potencial determinados por los electrodos (metálicos) cuyos valores son constantes, donde se aplica como condición de borde lo que se conoce como condición de Dirichlet. Operacionalmente, esto se logra haciendo que los valores de potencial en las celdas que definen estos bordes sean constantes. Por otro lado, están las condiciones de borde sobre las paredes del recipiente, que son no conductoras, por lo tanto la corriente eléctrica ($\vec{j} = \sigma \cdot \vec{E}$) sobre dicha pared sólo puede tener componente paralela a la misma. O sea que sobre estas paredes la componente perpendicular del campo eléctrico es nula, esto es:

$$E_{\infty} = 0 \qquad \text{ó} \qquad \frac{\partial V}{\partial n} = 0\,. \tag{14}$$

Esta condición de contorno se denomina de Neumann. Operacionalmente, esta condición de contorno se logra haciendo que los valores de las celdas que definen los bordes del recipiente sean iguales a los valores de las celdas contiguas interiores. Por ejemplo, si la pared izquierda del recipiente coincide con el eje *y*, cuyas celdas están caracterizadas por los índices ($i, j=0$) , el valor del potencial sobre esta pared $V_{i,j=0} = V_{i,j=1}$, con lo que se satisface la condición (14).

Experimento

El dispositivo experimental se muestra esquemáticamente en la Figura 2. Consiste en una bandeja rectangular, de vidrio transparente, que contiene agua como material conductor (de baja conductividad eléctrica). Debajo de la bandeja se coloca un papel milimetrado que permite conocer las coordenadas de cada punto. También se requiere tener dos electrodos metálicos conectados a una fuente de tensión. La tensión la suministra una fuente de 4 a 12 V. Es conveniente usar una tensión alterna para evitar la polarización de los electrodos, debido a los efectos de electrólisis. Puede usarse como fuente, por ejemplo, la salida (secundario) de un transformador de 5 a 12 V, que es muy accesible en negocios de electrónica. **Nota:** Asegúrese que se trata de un transformador y no de un auto-transformador o *variac*. Estos últimos pueden producir *shock* eléctrico. Se puede diferenciar fácilmente el transformador de los otros dispositivos observando si el primario del mismo está aislado del secundario.

Se colocan electrodos de distintas geometrías y para cada uno de estas configuraciones se determinan las líneas equipotenciales. Para ello, se buscan las coordenadas cartesianas sobre las cuales el potencial, medido con el voltímetro, es constante. La bandeja de vidrio se llena con aproximadamente 1 cm de agua común o destilada.

Actividad 1

Análisis semi-cuantitativo

- Mida por lo menos 6 a 8 puntos para cada equipotencial, con separaciones de aproximadamente 1 cm. Luego, en un papel milimetrado, marque estos puntos y únalos con líneas continuas. Estas son las líneas equipotenciales correspondiente a la geometría de electrodos escogida. Para cada configuración, determine al menos 10 líneas equipotenciales, tratando que alguna de ellas estén cerca de cada electrodo y algunas en las zonas centrales

- Determine las líneas equipotenciales y las líneas de campo para por lo menos dos configuraciones de electrodos. En cada caso discuta las zonas donde el campo es mayor.

- Para una de las configuraciones usadas (preferentemente la de placas paralelas, ver Figura 2) coloque un aislador entre los electrodos y determine la líneas equipotenciales. En particular estudie las líneas equipotenciales al rededor del aislador. ¿Cómo son las líneas de campo y el campo mismo sobre la superficie de aislador? ¿ Cómo puede explicar lo que observa en este caso?

- Para la misma configuración anterior, coloque un conductor entre los electrodos y determine la líneas equipotenciales. En particular estudie las líneas equipotenciales alrededor del conductor. ¿Cómo son las líneas de campo y el campo mismo sobre la superficie de conductor?

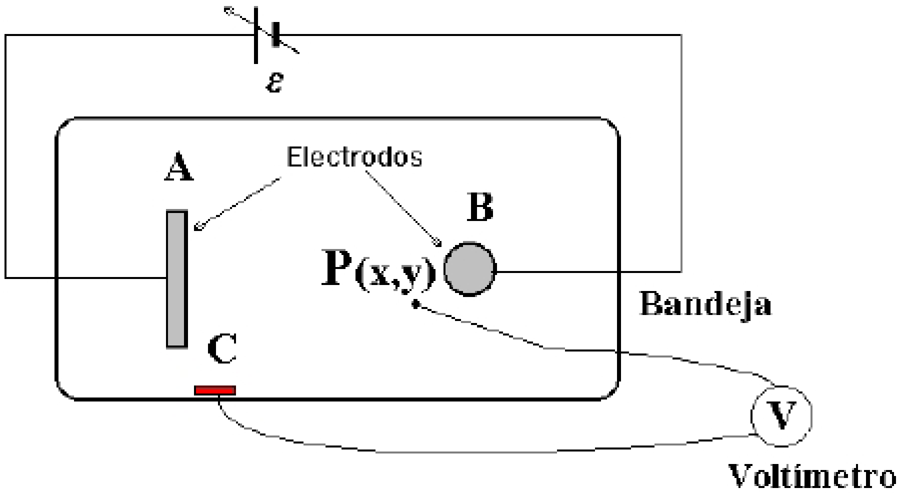

Figura 2. La bandeja contiene el agua, A es el electrodo positivo, B el negativo, C es un punto de referencia (fijo) a partir del cual se miden los potenciales, el cual puede coincidir o no con A o B. El punto P de coordenadas *(x,y)* donde se mide el potencial *V(x,y)*. **Nota:** Antes de conectar la fuente, pida que un docente revise su circuito y lo autorice a conectar la misma.

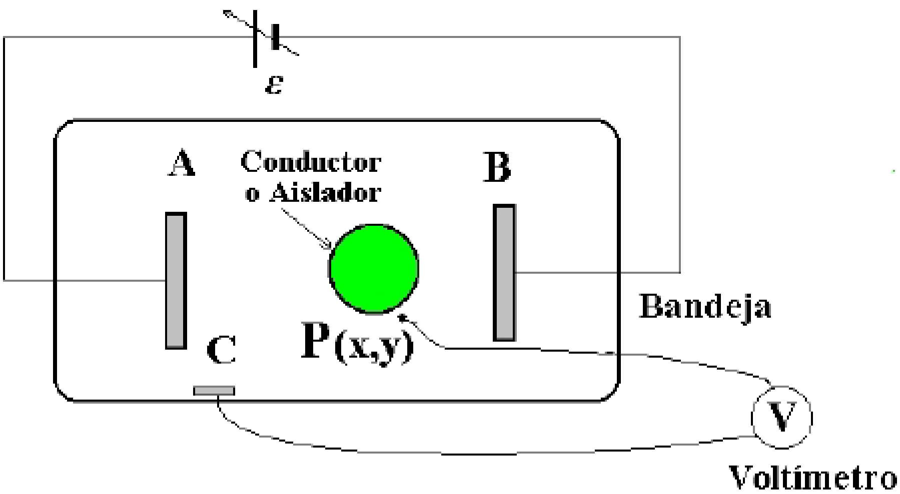

Figura 3. La bandeja de agua contiene además de los electrodos A y B una muestra de un conductor o aislador entre las placas.

Actividad 2

Análisis cuantitativo – Método de relajación

- Para dos de las geometrías ilustradas en la Figura 4, determinar el potencial para todos los puntos de la bandeja, usando un reticulado de aproximadamente 1 cm de lado. Represente sus resultados en un diagrama bidimensional.

- Para la geometría elegida, calcule el potencial por el método de relajación. Represente sus resultados usando el mismo criterio que el usado para representar sus resultados experimentales.

- ¿Cómo se comparan sus mediciones con los cálculos teóricos?

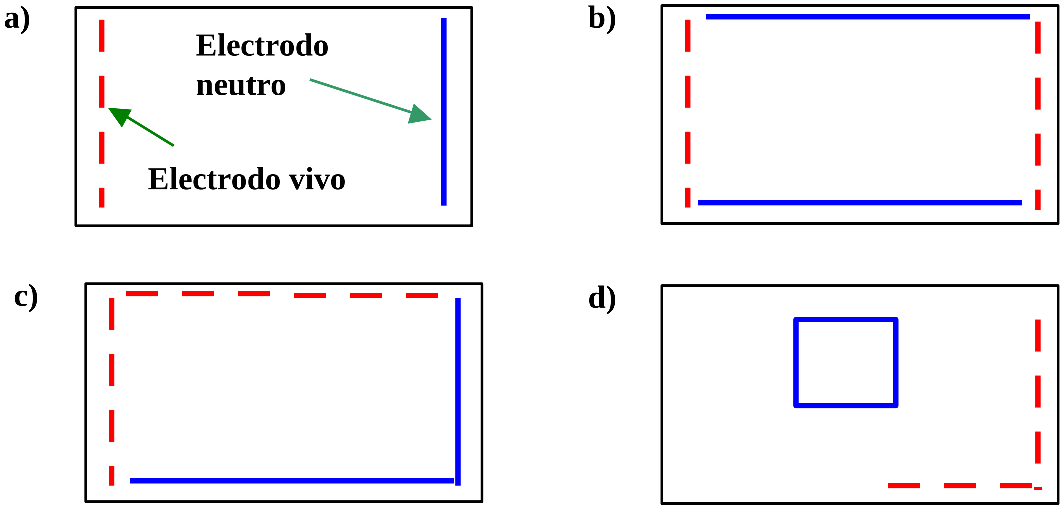

Figura 4. Ejemplos de geometrías posibles para estudiar los potenciales.

Bibliografía

1. *Física para estudiantes de ciencias e ingeniería*, Halliday, Resnick y Krane, 4ta. Ed. Vol. II Mexico 1992.

2. *Física, Vol.II - Campos y ondas*, M. Alonso y E. J. Finn, Fondo Educativo Interamericano, Ed. Inglesa, Addison-Wesley, Reading Mass. (1967); Fondo Educativo Interamericano (1970).

3. *Berkeley physics course, Volumen* 2, Electricidad y Magnetismo, E. M. Purcell, Editorial Reverté, Barcelona (1969).

4. *Electrostatic problems? Relax!*, M. DiStacio and W. McHarris, Am. J. Phys. **49**, 440 (1979).

5. *Física universitaria, vol. II,* F. Sears, M. Zemansky, H. Young y R. Freedman, Addison Wesley Longman 1990.

6. *Trabajos prácticos de fisica*, J. E. Fernández y E. Galloni - Editorial Nigar, Buenos Aires (1968).